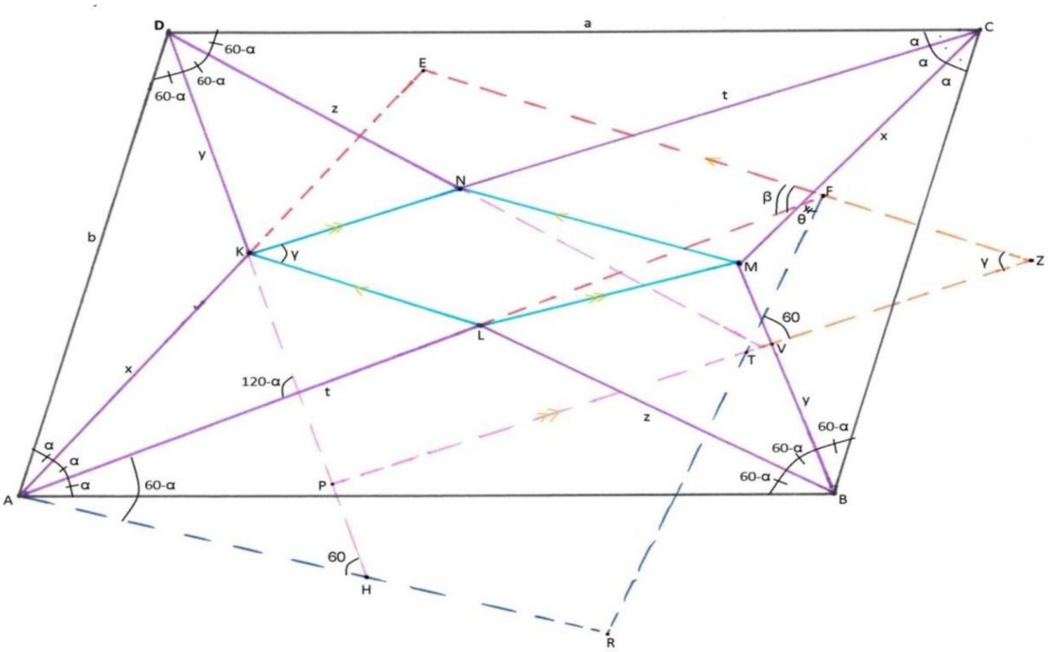
MORLEY TEOREMİNE DÖRTGENLERLE FARKLI BİR BAKIŞ

HAZIRLAYANLAR : BUSE GÜL – DAMLA ENGÜR

DANIŞMAN: ERKAN ÖZAL



PROJENİN AMACI

Projemize başlarken amacımız Morley Teoremi diye bilinen, herhangi bir üçgende her köşeyi üç eş açıya bölen, doğru parçaları ikişer kesişerek oluşturdukları noktaları köşe kabul eden üçgenin bir eşkenar üçgen olmasından hareket ederek buna benzer çalışma dörtgenlerde ve özel dörtgenlerde gerçekleştirilebilir mi, bunu nasıl yaparız ve nasıl sonuçlar elde edilebilir sorusuna yanıt aramaktı. Bunun için,

1) Bu teorem her dörtgende uygulanabilir mi?
2) Özel dörtgenlerde uygularsak nasıl bir sonuç elde edebiliriz?
3) Araştırmamızı derinleştirirsek, yeni bağıntılar veya yeni teoremler üretebilir miyiz?
4) Özel dörtgenlerden hangilerini seçmeliyiz?
5) Oluşan dörtgenlerin kenar uzunlukları ve alanları arasında nasıl bir bağıntı var?
6) Bu güne kadar yapılmamış bir çalışma, bize geometride hangi yolları açabilir ve hangi yeni bağıntılara ulaşabiliriz?

SONUÇ VE TARTIŞMA

Morley Teoremi'ni özel dörtgenlerde uyguladığımızda aşağıdaki sonuçları elde ettik.

1) Karede köşeleri üç eş açıya bölen ışınlar ikişerli kesişerek oluşturdukları dört noktayı köşe kabul eden dörtgen yine bir karedir. Kenarları arasındaki oran $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$ dür.

2) Eşkenar dörtgende uyguladığımızda oluşan dörtgen bir dikdörtgendir. Eşkenar dörtgenin dar açısı 3α olduğunda alanlar oranı $\dfrac{\frac{3}{2}.\sin\left(\alpha+60^\circ\right)}{\cos\left(\alpha-30^\circ\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ bulduk.

3) Eşkenar dörtgendeki uygulamada, dikdörtgen elde edilmişti. Bu çalışmayı teorem 3'te daha da ilerlettiğimizde bir eşkenarlı sekizgen elde ettik. Oluşan dikdörtgenin kenarları m ve n olursa $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+\tan\frac{\alpha}{2}}$ bulduk.

4) Eşkenar dörtgende Morley Teoremi'ni uyguladığımızda içinde elde edilen dikdörtgende Morley Teoremi'ni uyguladığımızda yine bir eşkenar dörtgen elde ettik. Bu eşkenar dörtgenin bir iç açısı 2β olarak aldığımızda $\boxed{2\beta=\alpha+60^\circ}$ bağıntısını bulduk.

5) Eşkenar dörtgenden yaptığımız uygulama ile elde edilen eşkenar dörtgenin kenarları a ve d br olduğunda $\dfrac{d}{a}=\dfrac{2}{3}.\cos\left(\alpha-30^\circ\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ olarak bulduk.

6) Eşkenar dörtgenden bir dikdörtgen, bir dikdörtgenden bir eşkenar dörtgen sonra yine bir ve sonra yine içinde bir eşkenar dörtgen oluşumunu devam ettirdiğimizde oluşan ilk eşkenar dörtgenin dar açısının ölçüsü 3α olmak üzere bu işlemi $2n$ kere uyguladığımızda oluşan içerideki eşkenar dörtgenin bir iç açısını $\dfrac{\alpha}{3^{n-1}}+60^\circ\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$ bağıntısı ile bulduk.

7) $\dfrac{\alpha}{3^{n-1}}+60^\circ\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$ Bağıntısını sonsuza kadar devam ettirdiğimizi düşündüğümüzde $n\to\infty$ için limitini aldık. Böylece iç içe çizilen eşkenar dörtgenlerin giderek kareye yaklaştığını ve sonunda kareye yakınsadığını belirledik. $n\to\infty$ için oluşan açının 90° 'ye yakınsadığını ve eşkenar dörtgenin de kareye yakınsadığını bulduk. Ve oluşan iç içe iki karenin kenar uzunlukları oranını $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$ olarak bulduk.

8) Oluşan ilk eşkenar dörtgenin bir kenarına a br ve oluşan n eşkenar dörtgenin bir kenarına x br dedik ve

$$\frac{x}{a}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\left(\frac{\alpha}{3^{k}}+60^{\circ}.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right)-30^{\circ}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$ olarak bulduk.

9) Morley Teoremini Teorem 4'te ikizkenar yamukta uyguladık. Taban açısını 3α olarak aldığımızda $\alpha=24^{\circ}$ için NPKME bir düzgün beşgeni oluştu.

10) İkizkenar yamukta Morley Teoremini uyguladığımızda oluşan dörtgen KLMN dörtgenin bir deltoid olarak bulduk.

11) $\alpha=24^{\circ}$ için $[KL]$ köşegeni ve $[DC]$ kenarı arasında

$$|DC|=|KM|.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2}$$ olarak bulduk.

12) ABCD ikizkenar yamuğun alanı ile oluşan KLMN deltoidinin alanları oranını

$a=k.c\ (k>0)$ olmak üzere

$$\frac{A(KLMN)}{A(ABCD)}=\frac{4\left[(k+1).\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 3\alpha-(k-1)\left[\cos\left(30^{\circ}-\alpha\right)-\frac{1}{2}.\sin 3\alpha\right]\right].\left[k.\sin\alpha-\cos\left(\alpha+30^{\circ}\right)\right]}{\left(k^{2}-1\right).\sqrt{3}\sin 6\alpha}$$

Olarak bulundu.

13) Teorem 5 de Morley teoremini uyguladığımızda, içeride oluşan dörtgenin bir paralelkenar olduğunu gösterdik. Bu paralelkenara KLMN paralelkenarı dedik.

14) KLMN paralelkenarı ile ABCD paralelkenarının alanları oranını $k=\frac{b}{a}$ olarak alındığında

$$\frac{A(KLMN)}{A(ABCD)}=\left|\frac{4\cos\left(30^{\circ}-\alpha\right)-\sqrt{3}\left(k+\frac{1}{k}\right)}{6\sin\left(60^{\circ}+\alpha\right)}\right|$$ olarak bulduk.

15) Bu oranı b=a durumunda incelediğimizde yani ABCD paralelkenarı bir eşkenar dörtgen olduğunda alanlar oranını

$$\frac{A(KLMN)}{A(ABCD)}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(60^{\circ}+\alpha\right)}\right)$$

olarak bulduk ki bu da bize Teorem 2'deki sonucu verdi. Bu da bize Teorem 2'nin aslında teorem 5 in özel bir durumunu oluşturduğunu gösterdi.

16) Morley Teoremi'ni özel dörtgenlerde uyguladığımızda her seferinde farklı dörtgenler elde ettik. Ve bunların arasında farklı bağıntılar bulduk.

17) Sonuç olarak 16'daki sonuca bağlı olarak dolaylı yoldan, Morley Teoremi'nin üçgenlerde uygulandığı gibi dörtgenlerde uygulanamayacağını, yani herhangi bir dörtgende uygulandığında her seferinde eş kenarlı bir dörtgeni veremeyeceğini göstermiş olduk.

ÖNERİLER

Yaptığımız proje bize şunu gösterdi, Morley Teoremi'nde olduğu gibi herhangi bir dörtgende uygulama yapıldığında her seferinde kare ya da eşkenar dörtgen gibi bir dörtgenin gelmediği, fakat buna karşılık özel dörtgenlerde uygulandığında, yine bir özel dörtgenin elde edilebildiği ve bu dörtgenlerin kenarları, alanları arasında bir bağıntının oluştuğu teoremlerle kanıtlanmıştır. Bundan dolayıdır ki bu teorem düzgün çokgenlerde uygulandığında da yine buna benzer sonuçlar elde edilebilecek olgusu aklımızda şekillenmiştir. Bu bağlamda yapılacak çalışmalarda ilginç sonuçların elde edilebileceğini düşünüyoruz.